FUNGSI EKSPONEN, TRIGONOMETRI DAN HYPERBOLIK

BAB I
FUNGSI EKSPONEN

Definisi

Fungsi eksponen adalah fungsi f yang menentukan z ke e^z . Rumusnya ialah f(z) = e^z . Fungsi eksponen dengan peubah bebas z =x + yi (x dan y bilangan real) adalah e^z = e^x (cos y + i sin y).

Dari definisi ini, jika :

- y = 0 maka $e^z = e^z$ merupakan fungsi eksponen real
- x = 0 maka e^{iy} = cos y + i sin y yng kita kenal sebagai rumus Euler dan kebenaranya dapat diperiksa melalui deret Maclaurin untuk e^z , dengan mengganti z dengan iy.

Turunan fungsi f(z) = e^z didapat sebagai berikut :

f(z) = e^z = e^x (cos y + i sin y)

bagian real dan imaginer berturut-turut :

- u (x,y) = e^x cos y
- v (x,y) = e^x sin y

fungsi u, v, u_x, u_y, v_x, v_y adalah fungsi yang kontiniu untuk setiap x dan y dan persamaan Cauchy Rieman dipenuhi dengan demikian diperoleh :

f(z) = $u_x + i v_x$

f(z) = e^x cos y + i e^x sin y , berarti :

$\frac{d}{d_z} e^z = e^z$, ada untuk setiap z pada bidang z

Jadi f(z) = e^z merupakan fungsi yang menyeluruh . sifat-sifat fungsi eksponen merupakan teorema-teorema ringan yang boleh dijadikan rumus.

Contoh ;

Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan $e^{(2z-10)} = 1$

Jawab :

Misalkan ; z = x + yi $\rightarrow$ 2z – 1 = (2x-1)+2yi

$e^{(2z-1)} = 1$

$e^{(2z-1)}$(cos 2y + i sin 2y) + 1 (cos o^0 + i sin 0^0)

Dengan menggunakan kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk polar, diperoleh :

$e^{2x-1} = 1 = e^0$

2x – 1 = 0

x = $\frac{1}{2}$

cos 2y = cos 0^0 dan sin 2y = sin 0^0 didapat y = k π, k bilangan bulat, memenuhi dua persamaan tersebut. Maka nilai z yang memenuhi persmaan ialah :

z = x + yi

z = $\frac{1}{2}$ + k π i, k bilangan bulat

BAB II
FUNGSI TRIGONOMETRI

Definisi yang akn diberikan cukup konsisten dengan rumus Euler

e^{iy} = cos y + sin iy

e^{-iy} = cos y – i sin y

Dengan menjumlahkan dn mengurangkan kedua rumus tersebut diperoleh :

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

jika z suatu bilangan kompleks, maka cos z dan sin z juga suatu bilangan kompleks, sehingga didefinisikan ;

Definisi 1

$$\cos z = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

fungsi h (z) e^{iz} dan H(z) = e^{-iz} masing-masing merupakan fungsi yang menyeluruh. Dengan demikian kombinasinya (jumlah dan selisih) merupakan fungsi yang menyeluruh.

Dari definisi diperoleh :

f(z) = cos z dan g(z) = sin z

Merupakan fungsi yang menyeluruh atau analitik pada setiap titik dibidang –z

Definisi 2

Empat bentuk fungsi trigonometri lain didefinisikan sebagai berikut ;

- tan z = $\frac{\sin z}{\cos z}$
- cot z = $\frac{\cos z}{\sin z}$
- sec z = $\frac{1}{\cos z}$
- csc z = $\frac{1}{\sin z}$

dari definisi tersebut, maka fungsi $f_1(z)$ = tan z dan $f_2(z)$ = sec z, analitik pada setiap titik z di bidang z dengan cos z $\neq 0$, sedangkan fungsi $g_1(z)$ = cot z dan $g_2(z)$ = csc z, analitik pada setiap titik z di bidang z, dengan sin z $\neq 0$.

Contoh :

Jabarkan dan sederhanakan cos $\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$

Jawab :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos a - \sin\frac{\pi}{4}\sin a$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos a - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\cos a - \sin a)$$

BAB III
FUNGSI HYPERBOLIK

Fungsi hyperbolik didefinisikan sebagai kombinasi dari fungsi eksponen, seperti berikut :

Definisi 1

Fungsi sinus hyperbolik dan cosinus hyperbolik adalah

$$\text{Sinh } z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\text{cosh } z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

Definisi 2

Empat fungsi hyperbolik lain didefinisikan seperti pada fungsi trigonometri :

- tanh z = $\dfrac{\sinh z}{\cosh z}$
- coth z = $\dfrac{\cosh z}{\sinh z}$
- sech z = $\dfrac{1}{\cosh z}$
- csch z = $\dfrac{1}{\sinh z}$

fungsi $f_1(z)$ = tanh z, $f_2(z)$ = sech z analitik disetiap titik pada bidang –z kecuali untuk cosh z = 0, sedangkan fungsi $g_1(z)$ = coth z, $g_2(z)$ = csch z analitik disetiap titik pada bidang –z, kecuali sinh z = 0.

Contoh :
Carilah turunan pertama dari fungsi hyperbolik f(x) = sinh (3x)
Jawab :

f(x) = sinh (3x) $\Rightarrow$ f^1 (x) = cosh (3x) . (3)
= 3 cosh (3x)

Jadi f(x) = sinh (3x) maka f^1 (x) = cosh (3x)

BAB IV
TEOREMA

A. Teorema I

Beberapa sifat fungsi eksponen

1). $e^z \neq 0$

Bukti :

Dengan kontradiksi, jika z = x + yi, andaikan $e^z = 0$

e^x cos y + i e^x sin y = 0, berarti e^x cos y = 0 dan e^x sin y = 0, dari fungsi real telah diketahui $e^x > 0$, yaitu tidak nol, maka haruslah cos y = 0 dan sin y = 0. tidak ada y yang bersamaan memenuhi kedua persamaan tersebut. Berarti tak ada z = x + yi, pengandian salah maka ex $\neq$ 0.

2). $e^0 = 1$

bukti :

$e^0 = 1$

z = x + yi = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 dan y = 0

$e^0 = e^0 (\cos 0^0 + I \sin 0^0)$ (terbukti)

3). $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

Bukti :

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$. Maka :

$$\begin{aligned} e^{z_1}.e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\ .\ .e^{z_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{z_1+z_2}\left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right) \\ &= e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)_2} \\ &= e^{(x_1+y_1)i+(x_2+y_2)_2} \\ e^{z_1}.e^{z_2} &= e^{z_1+z_2} \quad \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

4). $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

Bukti :

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 - i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 - i\sin y_2)} \\ &= e^{(x\ -x_2)}\left[\cos(y_1-y_2) + i\sin(y_1-y_2)\right] \\ &= e^{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i} \\ &= e^{(x_1-y_2i)+(x_1-y_2)i} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \quad \text{(terbukti)}$$

5). $e^{\bar{z}} = e^{\bar{z}}$

Bukti :

Misalkan z = x + yi maka $\bar{z}$ = x - yi

$e^{\bar{z}} = e^{x}[(\cos(-y) + i\sin(-y)]$

$= e^{x}[(\cos y - i\sin y)]$

$e^{\bar{z}} = e^{\bar{z}}$

6). $e^{\bar{z}} = e^{z+2k\pi i}$, k bilangan bulat

Bukti :

Misalkan z = x + yi

$e^{z+2k\pi i} = e^{+(y+2k\pi i)i}$

$= e^{x}[\cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi)]$

$= e^{x}(\cos y + i\sin y)$

$e^{z+2k\pi i} = e^{\bar{z}}$ (terbukti)

7). Jika z = x +yi , $|e^{z}| = e^{x}$ dan arg (e^{z}) = y

Bukti :

Jika z = x +yi maka $|e^{z}| = e^{x}$ dan arg (e^{z}) = y

$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$ dibaca sebagai bentuk polar dari e^{z} ,

jelas $|e^{z}| = e^{x}$ dan arg (e^{z}) = y (terbukti)

B. Teorema 2

- Teorema 2.1

  Turunan fungsi trigonometri :

  1. $\frac{d}{d_z}$ sin z = cos z
  2. $\frac{d}{d_z}$ cos z = -sin z
  3. $\frac{d}{d_z}$ tan z = $\sec^2$ z
  4. $\frac{d}{d_z}$ cot z = - $\csc^2$ z
  5. $\frac{d}{d_z}$ sec z = sec z tan z
  6. $\frac{d}{d_z}$ csc z = - csc z cot z

-) Bukti Teorema No.1

$$\frac{d}{d_z}\sin z = \frac{d}{d_z}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

$$= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\frac{d}{d_z}\sin z = \cos z \quad \text{(terbukti)}$$

-) Bukti Teorema No.2

$$\frac{d}{d_z}\cos z = \frac{d}{d_z}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)$$

$$= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\frac{d}{d_z}\cos z = -\sin z \quad \text{(terbukti)}$$

- Teorema 2.2

  Sifat – sifat trigonometri :

  1. sin z = 0 $\Leftrightarrow$ z = k π, k bilangan bulat
  2. cos z = 0 $\Leftrightarrow$ $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat
  3. sin (-z) = - sin z
  4. cos (-z) = cos z
  5. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
  6. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
  7. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
  8. sin 2z = 2 sin z cos z
  9. $\cos 2z = \cos^2 z + \sin^2 z$
  10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

-) Bukti Teorema No.2

Jika cos z = 0 maka $\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0$

$$e^{iz} = - e^{-iz}$$

$$e^{iz} = - 1$$

apabila z = x + yi, maka $e^{-2y+2xi} = -1$

$$e^{-2y}(\cos 2x + i\sin 2x) = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Dengan demikian didapat :

$$e^{-2y} = 1,\ \cos 2x = \cos\pi,\ \sin 2x = \sin\pi$$

Nilai yang memenuhi ialah :

y = 0 dan $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat

jadi z = x + yi $= \frac{\pi}{2} + k\pi$ (terbukti)

-) bukti Teorema No.6

Sin z_1 cos z_2 + cos z_1 sin z_2

$$= \left[\frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}).\frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2})\right] + \left[\frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}).\frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2})\right]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

Sin z_1 cos z_2 + cos z_1 sin z_2 = sin (z_1 + z_2)

-) bukti Teorema No.8

Sin 2z = sin (z + z)

= sin z cos i + cos z sin z

Sin 2z = 2 sin z cos z (terbukti)

B. TEOREMA 3

- Teorema 3.1

Turunan fungsi hyperbolik :

1. $\frac{d}{d_x}\sinh z$ = cosh z
2. $\frac{d}{d_x}\cosh z$ = sinh z
3. $\frac{d}{d_x}\tanh z$ = sech^2 z
4. $\frac{d}{d_x}\coth z$ = - csch^2 z
5. $\frac{d}{d_x}\sec h z$ = sech z tanh z
6. $\frac{d}{d_x}\csc h z$ = - csch z coth z

Bukti Teorema No. 1

$$\frac{d}{d_x}\sinh z = \frac{d}{d_x}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\frac{d}{d_x}\sinh z = \cosh \text{z}$$

Bukti Teorema No.2

$$\frac{d}{d_x}\cosh z = \frac{d}{d_x}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\frac{d}{d_x}\cosh z = \sinh \text{z}$$

Bukti Teorema No.3

$$\frac{d}{d_x}\tanh z = \frac{d}{d_x}\left(\frac{\sinh z}{\cosh z}\right)$$

$$= \frac{d}{d_x}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)$$

$$= \frac{(e^z + e^{-z})(e^z + e^{-z}) - (e^z - e^{-z})(e^z - e^{-z})}{(e^z + e^{-z})^2}$$

$$= \frac{4}{\left(e^z + e^{-z}\right)^2}$$

$$\frac{d}{d_x}\tanh z = \text{sech}^2 \text{ z} \quad \text{(terbukti)}$$

- Teorema 3.2

Sifat – sifat fungsi hyperbolik ;

1. sinh z = 0 $\Leftrightarrow$ z = k π i, k bilangan bulat
2. cosh z = 0 $\Leftrightarrow$ $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i, k bilangan bulat
3. sin (-z) = - sinh z
4. cos (-z) = cosh z
5. $\cosh^2$ z + $\sinh^2$ z = 1
6. sinh ($z_1 + z_2$) = sinh z_1 cosh z_2 + cosh z_1 sinh z_2
7. cosh ($z_1 + z_2$) = cosh z_1 cosh z_2 - sinh z_1 sinh z_2
8. sinh 2z = 2 sinh z cosh z
9. cosh 2z = $\cosh^2$ z + $\sinh^2$ z

Bukti Teorema No.6

Sinh z_1 cosh z_2 + cosh z_1 sinh z_2

$$= \left[\frac{1}{2}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}).\frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2})\right] + \left[\frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}).\frac{1}{2}(e^{iz_2} - e^{-iz_2})\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

Sinh z_1 cosh z_2 + cosh z_1 sinh z_2 = sinh (z_1 + z_2) (tebukti)

Bukti Teorema No.8

Sinh 2z = sinh (z + z)

= sinh z cosh i + cosh z sinh z

Sinh 2z = 2 sinh z cosh z (terbukti)

- Teorema 3.3

  Jika z = x + yi maka

  1. cos z = cos (x + yi) = cos x cosh y – isin x sinh y
  2. sin z = sin (x + yi) = sin x cosh y + i sin cos x sinh y

  akibat :

  cos(iy) = cosh y

  sin (iy) = i sinh y

  Bukti 1.

  cos z = cos (x + yi) = $\frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right)$

  $= \frac{1}{2} e^{-y} . e^{ix} + \frac{1}{2} e^{y} . e^{ix}$

  $= \frac{1}{2} e^{-y}$ (cos x + i sin x) + $\frac{1}{2} e^{y}$ (cos x – i sin x)

  cos z = cos x cosh y – i sin x sinh y (terbukti)

- Teorema 3.4
  1. sin (iz) = i sin z
  2. sin (iz) = i sinh z
  3. cosh (iz) = cos z
  4. cos (iz) = cosh z

  Bukti 2

  sin (iz) = $\frac{1}{2i}\left(e^{zi^2} - e^{-zi^2}\right)$

  $= \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right)$

  $= i.\frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$

  sin (iz) = i sin z (terbukti)

- Teorema 3.5

  Jika z = x + yi maka

  1. sinh z = sinh x cos y + i cosh x sin y
  2. cos z = cosh x cos y +i sinh x sin y

  Bukti No. 1

  sinh z = sin (x + yi)

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+yi} - e^{-x-yi}\right) = \frac{1}{2}e^{x}.e^{yi} - \frac{1}{2}e^{-x}.e^{-yi}$$

$$= \frac{1}{2}e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) - \frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos y - i\sin y\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\cos y + i\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\sin y$$

  sinh z = sinh x cos y + i cosh x sin y (terbukti)

LATIHAN SOAL

1. tentukan nilai z yang memenuhi persamaan $e^z = -i$
2. a). Hitung nilai dari cos (-120^0)
   b). Buktikan $(\sin A + \cos A)^2 - 2 \sin A \cos A = 1$
3. Carilah $f^1(x)$ dari tiap fungsi f(x) berikut :
   a). f(x) = tanh (sin x)
   b). f(x) = x sinh x

PENYELESAIAN

1. tentukan nilai z yang memenuhi persamaan $e^z = -i$

Jawab :

Misalkan z = x + yi

$e^z = -i$

$e^z (\cos y + i \sin y) = 0 - i$, maka

$e^z \cos y = 0$ dan $e^z \sin y = -i$

Dari persamaan pertama cos y = 0, karena $e^z \neq 0$ diperoleh $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat. Apabila kedua persamaan dikuadratkan kemudian dijumlahkan, maka

$(e^z)^2 = -i$ dan $e^z = \pm 1$

jawab yang memenuhi hanya mungkin $e^z = -i$ berarti x = 0

untuk x = 0, persamaan kedua menjadi sin y = -1, menghasilkan $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k bilangan bulat.

Dari dua nilai yang diperoleh , yang memenuhi adalah $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k bilangan bilat, sehingga nilai z memenuhi persamaan adalah z = 0 + $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$ = $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$.

2. a) $\cos(-120^0) = \cos 120^0$

$= \cos(180 - 60)^0$

$= -\cos 60^0$

$= -\frac{1}{2}$

b). $(\sin A + \cos A)^2 - 2 \sin A \cos A = 1$

Bukti :

$(\sin A + \cos A)^2 - 2 \sin A \cos A = 1$

$\sin^2 A + 2 \sin A \cos A + \cos^2 A - 2 \sin A \cos A = 1$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$1 = 1$ (terbukti)

3. a). f(x) = tanh (sin x)

Misalkan u = sin x dan $u^1 = \cos = x$

$F(x) = \tan u \Rightarrow f^1(x) = \text{sech}^2\, u \,.\, u^1$

$= \text{sech}^2 (\sin x) \,.\, (\cos x)$

$f^1(x) = \cos x \,\text{sech}^2 (\sin x)$

b). f(x) = x sin x

misalkan u = x , v = sinh x

$u^1 = 1$, $v^1 = \cosh x$

$f(x) = u \,.\, v \Rightarrow f^1(x) = u^1 \,.\, v + u \,.\, v^1$

$= (1)(\sinh x) + (x)(\cosh x)$

$f^1(x) = \sinh x + x \cosh x$

RANGKUMAN

Fungsi eksponen

z =x + yi

$e^z = e^x$ (cos y + i sin y).

Fungsi trigonometri

$\cos z = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ $\qquad \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ $\qquad \sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

$\sin z = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ $\qquad \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ $\qquad \csc z = \dfrac{1}{\sin z}$

Fungsi Hiperbolik

$\text{Sinh } z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$ $\qquad \tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ $\qquad \text{sech } z = \dfrac{1}{\cosh z}$

$\cosh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ $\qquad \coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$ $\qquad \text{csch } z = \dfrac{1}{\sinh z}$

Turunan fungsi Eksponen

$$\frac{d}{d_z}(e^z) = e^z$$

Turunan Fungsi Trigonometri

1. $\dfrac{d}{d_z}\sin z = \cos z$
2. $\dfrac{d}{d_z}\cos z = -\sin z$
3. $\dfrac{d}{d_z}\tan z = \sec^2 z$
4. $\dfrac{d}{d_z}\cot z = -\csc^2 z$
5. $\dfrac{d}{d_z}\sec z = \sec z \tan z$
6. $\dfrac{d}{d_z}\csc z = -\csc z \cot z$

Turunan fungsi hyperbolik :

1. $\dfrac{d}{d_x}\sinh z = \cosh z$
2. $\dfrac{d}{d_x}\cosh z = \sinh z$
3. $\dfrac{d}{d_x}\tanh z = \text{sech}^2 z$
4. $\dfrac{d}{d_x}\coth z = -\text{csch}^2 z$
5. $\dfrac{d}{d_x}\sec h z = \text{sech } z \tanh z$
6. $\dfrac{d}{d_x}\csc h z = -\text{csch } z \coth z$

DAFTAR PUSTAKA

- Churchill, Complex variabels, new york, mc graw hill book company inc 1960
- John D paliouras, complex variebles for scientist and engginers new york, maemillan publishing. 1975
- Prayitno Budhi dan Chairani Zahra, Matematika untuk SMU jilid 3A semester 1, Jakarta : Erlangga 2003
- Wirodikromo sartono, Matematika 2000 untuk Smu jilid 6, semester 2 Jakarta : Erlangga, 2003